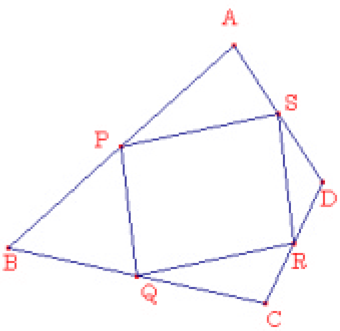
四角形の性質の探求

～図形の性質の発見ツールとしてのCABRIⅡの利用例～

上原永護（群馬県前橋市桂萱中学校）
E-MAIL:　mow@mail.wind.ne.jp

１．はじめに



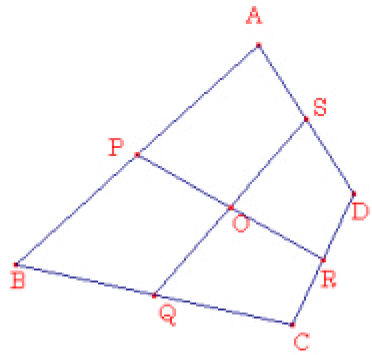
中学２年の図形の学習では、三角形や四角形、相似な図形の性質について学習する。その学習内容と関連する問題に、四角形の４つの辺の中点を結んでできる図形の性質(Pierre Varignon(1654～1722)によって発見された)について、中点連結定理を利用して、外部の図形との関連等を探求する問題がある。

この問題は、ほとんどの教科書の例題に取り上げられているように、単純かつ明快で、その性質の美しさに興味・関心をもち、幾何学に惹かれるものも少なくない。

また、コンピュータの作図ツールを利用することにより、その性質の普遍性に気づき、実感することができる。その図形のもつ性質、作図ツールのもつ機能がともに活かされる素晴らしい教材であると考える。愛知教育大学　数学教室　飯島康之　氏は、「４角中点」というホームページでその図形の性質に関する研究成果を公開している。

http://www.auemath.aichi-edu.ac.jp/teacher/iijima/gc/world/4-chu/i-01.htm

飯島氏の実践に興味をもち、さらに条件を変え、この図形の性質の探求を行うこととした。右の図のように中点の結び方を変えてみたが、線分ＰＲ、ＱＳによって４つに分割されたものの、四角形ＡＢＣＤを変形させても保たれる図形的な性質は、当初、特質すべきものがないように見えた。



そこでCabriGeometryⅡ（以下ＣＡＢＲＩ）の面積測定機能を利用し、分割してできた４つの四角形の面積を測定した。四角形ＡＢＣＤとの関連は全くないように見えたが、計算機能を利用して調べてみると、四角形ＡＢＣＤを変形させても、次の関係が成り立つことが分かった。

四角形ＡＰＯＳ＋四角形ＣＲＯＱ
＝四角形ＢＱＯＰ＋四角形ＤＳＯＲ
＝四角形ＡＢＣＤ÷２

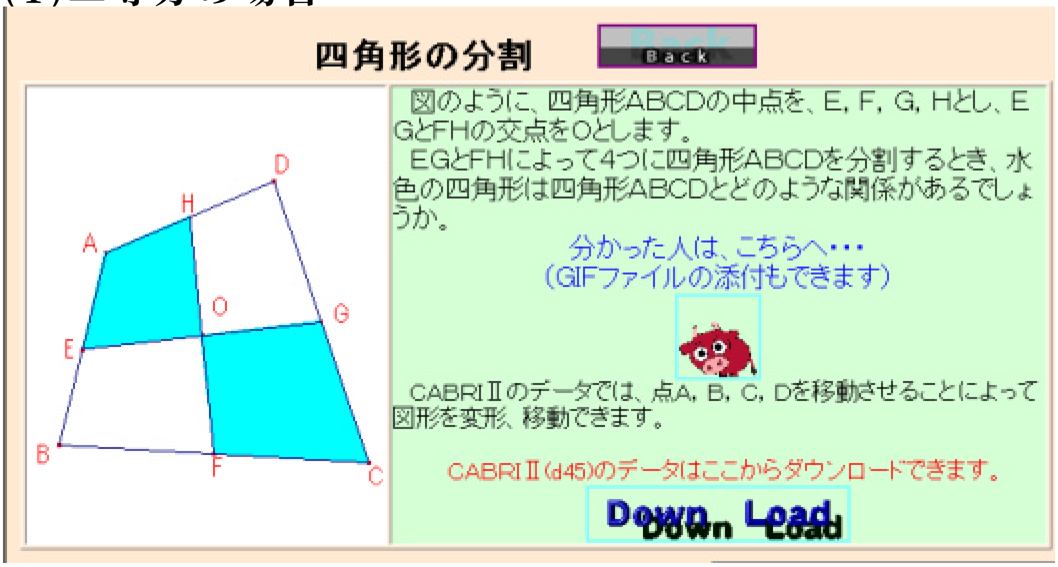
そこで、このような分割方法を行った場合の四角形の性質について調べることにした。

２．研究の内容

私のホームページ（以下ＨＰ）「ＣＡＢＲＩⅡの部屋」（http://www2.wind.ne.jp/mow/math/cabri/）にＣＡＢＲＩを利用して作成した図形の問題及びそのデータを公開している。四角形の性質の探求を行いながら、調べた図形を問題としてをＨＰにした。簡単なものは、発見した性質を一切表示していないが、複雑なものは非表示の状態でデータ内に埋め込んでおいた。

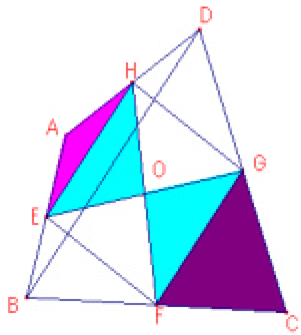
以下は、その探求の過程に従って、ＣＡＢＲＩのデータ及びＣＡＢＲＩを使って気づいた図形の性質である。

(1)二等分の場合



先に述べた通り、ＣＡＢＲＩで調べてみると水色部分の面積の合計は、外側の四角形の面積の半分となっている。また、中学２年での証明は次のようにすることができる（以下、証明は紙面の都合で簡略化）。

＜証明＞
中点連結定理より、△ＡＥＢと△ＡＢＤの相似比は１：２、したがって、面積の比は１：４となるから、△ＣＧＦと△ＣＤＢも同様にして
　△ＡＥＢ＋△ＣＧＦ
＝(△ＡＢＤ＋△ＣＤＢ)／４
＝四角形ＡＢＣＤ／４　　　・・・①



同様にして
　△ＢＦＥ＋△ＤＨＧ
＝(△ＡＢＣ＋△ＣＤＡ)／４
＝四角形ＡＢＣＤ／４　　　・・・②

①、②より
　△ＡＥＢ＋△ＣＧＦ＋△ＢＦＥ＋△ＤＨＧ
＝四角形ＡＢＣＤ／２

したがって、
　四角形ＥＦＧＨ＝四角形ＡＢＣＤ／２　　　・・・③

中点連結定理より、四角形ＥＦＧＨは平行四辺形であるから、ＥＯ＝ＧＯ、よって、底辺と高さが等しい三角形だから、

△ＦＧ０＝△ＥＦＯ、△ＨＥＯ＝△ＧＨＯ

また、ＨＯ＝ＦＯだから同様に、

△ＥＦＯ＝△ＨＥＯ、△ＧＨＯ＝△ＦＧＯ

よって、③より

△ＨＥＯ＋△ＦＧＯ＝四角形ＥＦＧＨ／２
＝（四角形ＡＢＣＤ／２）／４
＝四角形ＡＢＣＤ／４　　・・・④

①、④より

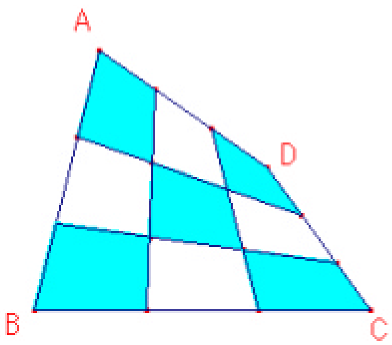
四角形ＡＥＯＨ＋四角形ＣＧＯＦ
＝（△ＡＥＢ＋△ＨＥＯ）＋（△ＣＧＦ＋△ＦＧＯ）
＝（△ＡＥＢ＋△ＣＧＦ）＋（△ＨＥＯ＋△ＦＧＯ）
＝四角形ＡＢＣＤ／４＋四角形ＡＢＣＤ／４
＝四角形ＡＢＣＤ／２

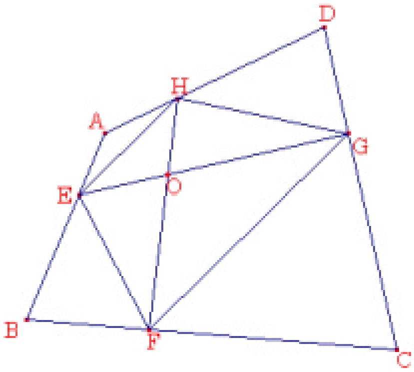
(2)三等分の場合

同様の分割方法を行っていくと、各辺を三等分した場合は、右の図のようになる。

この場合、水色の部分の面積の合計は、四角形ＡＢＣＤの５／９となる。

ここで、次の図のように分割したとき、その辺の分割点を結ぶとその線分も同じ比に分けられるという性質がある。





＜証明＞

左の図のように

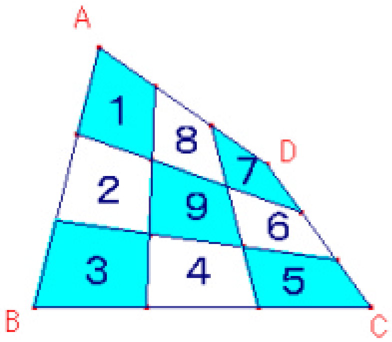
ＡＥ：ＥＢ＝ＡＨ：ＨＤ
＝ＢＦ：ＦＣ＝ＤＧ：ＧＣ
＝１：ｔ

となっているとき、

ＥＨ//ＢＤ//ＦＧ

ＥＨ：ＢＤ＝１：（１＋ｔ）
ＦＧ：ＢＤ＝ｔ：（１＋ｔ）

したがって、　ＥＨ：ＦＧ＝１：ｔ
よって、ＥＯ：ＯＧ＝ＨＯ：ＯＦ＝１：ｔ



　従って、内部に「(2)二等分の場合」の考えを用いることができるので、分割された各部分の面積を数字１～９を用いて表すと

１＋９＝２＋８
３＋９＝２＋４
５＋９＝４＋６
７＋９＝６＋８

左辺、右辺をそれぞれ加えて
　１＋３＋５＋７＋９＋９＋９＋９
＝２＋２＋４＋４＋６＋６＋８＋８

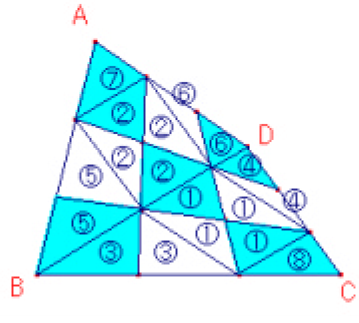
　(１＋３＋５＋７＋９)＋９×３
＝(２＋４＋６＋８)×２

　(１＋３＋５＋７＋９)×３＋９×３
＝(２＋４＋６＋８)×２＋(１＋３＋５＋７＋９)×２

　(１＋３＋５＋７＋９)×３＋９×３
＝(２＋４＋６＋８＋１＋３＋５＋７＋９)×２

　(１＋３＋５＋７＋９)×３＋９×３
＝(１＋２＋３＋４＋５＋６＋７＋８＋９)×２

　(１＋３＋５＋７＋９)×３＋９×３
＝四角形ＡＢＣＤ×２
　(１＋３＋５＋７＋９)＋９＝四角形ＡＢＣＤ×２／３



　また、右の図で同じ数字の部分は面積は同じであるから

　四角形ＡＢＣＤ
＝４（①＋②）＋２（③＋④）
　　　　　＋２（⑤＋⑥）＋⑦＋⑧

「２等分の場合」と同様にして、
①＋⑦＝⑤＋⑥、②＋⑧＝③＋④

また、⑦＋⑧＝四角形ＡＢＣＤ／９

従って、

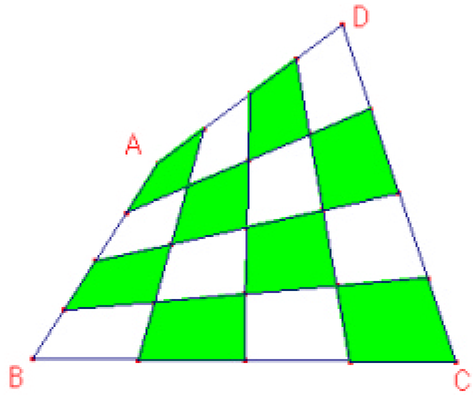
四角形ＡＢＣＤ＝4(①+②)+2(②+⑧)+2(①+⑦)+⑦+⑧
四角形ＡＢＣＤ＝６（①＋②）＋３（⑦＋⑧）
四角形ＡＢＣＤ＝６（①＋②）+3×四角形ＡＢＣＤ/9
四角形ＡＢＣＤ＝６（①＋②）＋四角形ＡＢＣＤ／３
（①＋②）＝四角形ＡＢＣＤ／９

よって、「９」の部分は四角形ＡＢＣＤの１／９であるから

（１＋３＋５＋７＋９）＋四角形ＡＢＣＤ／９
＝四角形ＡＢＣＤ×２／３
（１＋３＋５＋７＋９）
＝四角形ＡＢＣＤ×２／３－四角形ＡＢＣＤ／９
（１＋３＋５＋７＋９）＝四角形ＡＢＣＤ×５／９

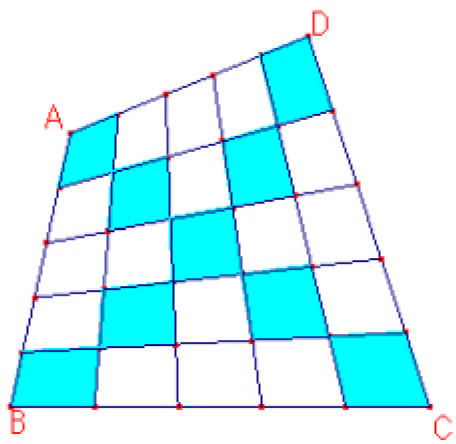
(3)四等分の場合

四等分の場合、右の図のように分け、色をつけた部分の面積の合計は、四角形ＡＢＣＤの１／２となる。



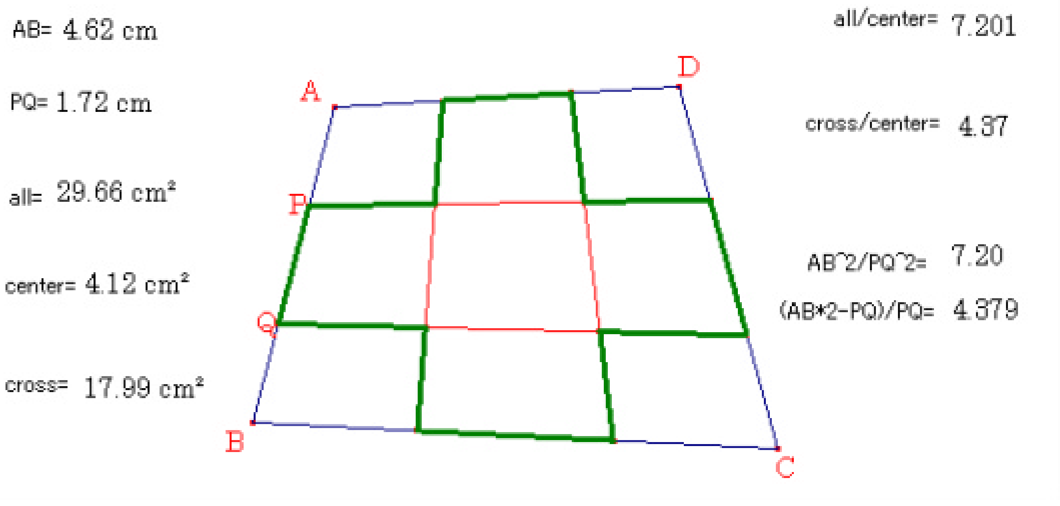
(4)五等分の場合

五等分の場合、(1)～(3)のような分割方法も同様な性質があるが、右の図のように分け、色をつけた部分の面積の合計は、四角形ＡＢＣＤの９／２５となる。

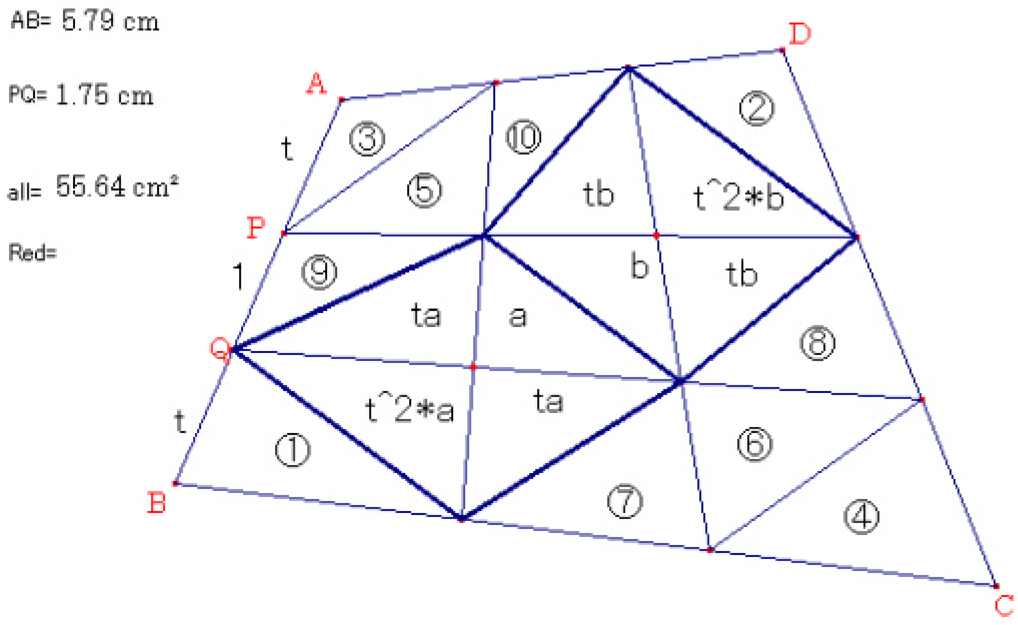


(5) n等分の場合①

図のようにＡＰ＝ＢＱとなる点Ｐ，Ｑを辺ＡＢ上につくり、辺ＡＤ，ＢＣ，ＤＣを同じ比に分ける。このとき、四角形ＡＢＣＤ全体の面積、真ん中の四角形の面積、十字型の面積には図に示された関係がある。



＜四角形ＡＢＣＤ全体の面積と真ん中の四角形の面積の関係の証明＞



　真ん中の部分を図のようにａ、ｂに分け、
　ＡＰ：ＰＱ＝ｔ：１
とすると右の図のように表せるので太線で囲まれた部分の面積の合計は
　$(t+1)^2(a+b)$

また、⑤＋⑥の部分は、　　$t^2(a+b)$
　　　　①の部分は　　△ＡＢＣ×ｔ／（２ｔ＋１）
　　　　②の部分は　　△ＣＤＡ×ｔ／（２ｔ＋１）
したがって　①＋②の部分は、
　四角形ＡＢＣＤ×ｔ／（２ｔ＋１）
同様にして　③＋④の部分も、
　四角形ＡＢＣＤ×ｔ／（２ｔ＋１）
また、
（④＋⑥）：（④＋⑥＋⑦＋⑧）＝ｔ：（ｔ＋１）
であるから
(④+⑥+③+⑤)：(④+⑥+⑦+⑧+③+⑤+⑨+⑩)＝ｔ：(ｔ+1)

$$(③+④+⑤+⑥+⑦+⑧+⑨+⑩) = \frac{(④+⑥+③+⑤)(t+1)}{t}$$

$$(③+\cdots+⑩) =$$

$$=\left(t^2(a+b)+\frac{\text{四角形ABCD}\times t}{2t+1}\right)\times\frac{(t+1)}{t}$$

ここで、真ん中の（ａ＋ｂ）をＸ、四角形ＡＢＣＤの面積をＳとすると、Ｓは太線で囲まれた部分と①～⑩の和であるから、

$$S=(t+1)^2X+\frac{tS}{2t+1}+\left(t^2X+\frac{tS}{2t+1}\right)\times\frac{t+1}{t}$$

$$S=(2t+1)(t+1)X+\frac{t(2t+1)}{(2t+1)^2}S$$

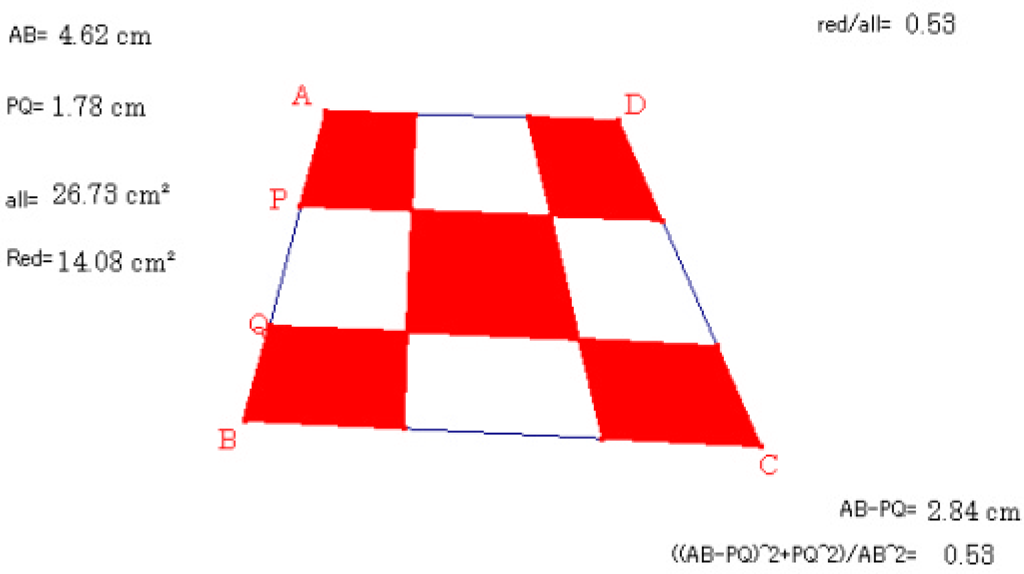
$$(2t+1)(t+1)X=S-\frac{t}{2t+1}S$$

$$(2t+1)(t+1)X=\frac{t+1}{2t+1}S$$

$$X=\frac{S}{(2t+1)^2}$$

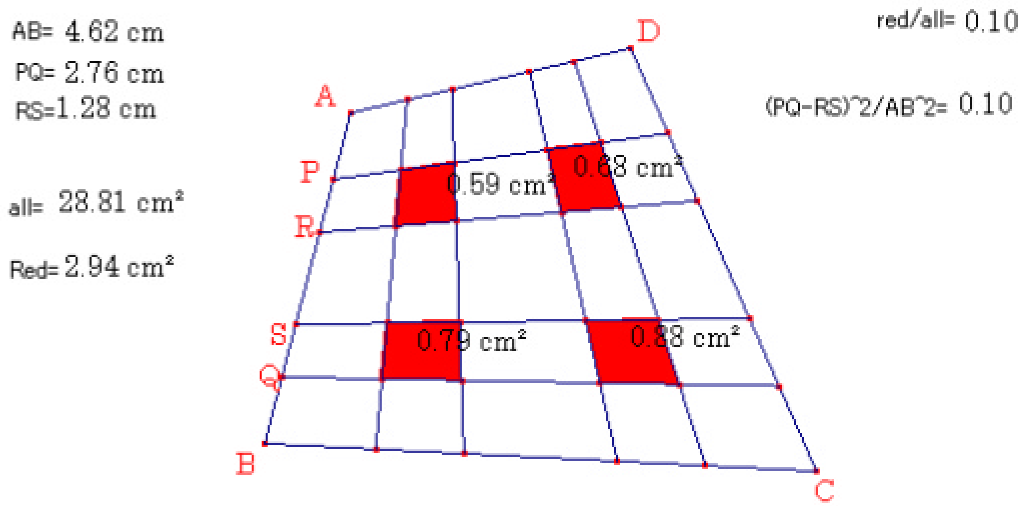
　つまり、真ん中の部分と四角形ＡＢＣＤの面積の比は
　$PQ^2 : AB^2$　となる。

(6) n 等分の場合②



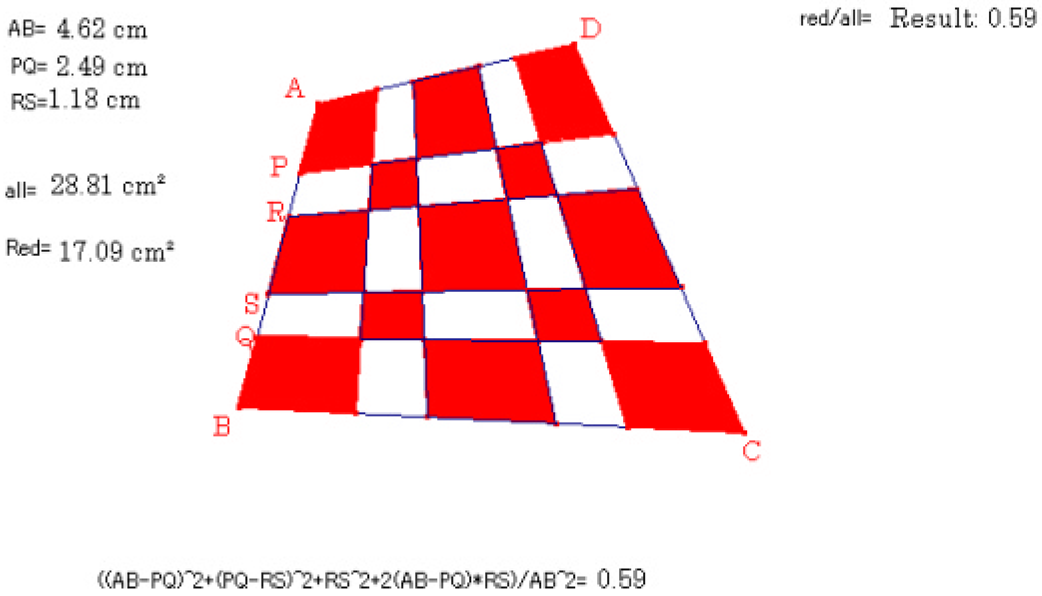
図のようにＡＰ＝ＢＱとなる点Ｐ，Ｑを辺ＡＢ上につくり、辺ＡＤ，ＢＣ，ＤＣを同じ比に分ける。図のように各点を結び、四角形をＡＢＣＤを９つに分割したとき、四角形ＡＢＣＤ全体の面積、色の部分の面積の合計には図に示した関係がある。

(7) n 等分の場合③



図のように、ＡＰ＝ＢＱ、ＡＲ＝ＢＳとなる点Ｐ，Ｑ，Ｒ，Ｓを辺ＡＢ上につくり、辺ＡＤ，ＢＣ，ＤＣを同じ比に分ける。図のように各点を結び、四角形をＡＢＣＤを２５に分割したとき、四角形ＡＢＣＤ全体の面積、色の部分の面積の合計は図に示した性質がある。

(8) n等分の場合④



図のように、ＡＰ＝ＢＱ、ＡＲ＝ＢＳとなる点Ｐ，Ｑ，Ｒ，Ｓを辺ＡＢ上につくり、辺ＡＤ，ＢＣ，ＤＣを同じ比に分ける。図のように各点を結び、四角形をＡＢＣＤを２５に分割したとき、四角形ＡＢＣＤ全体の面積、赤い部分の面積の合計は図に示した性質がある。

３．終わりに

本研究における図形の性質の発見過程は主に以下の通りである。

(1) 予想
（図形の変形機能などを使い、性質を発見する。）

パターン①　図形を作図し、念頭操作だけでアイデアが浮かぶ場合
パターン②　図形を作図し、図形を変形させながら、アイデアが浮かぶ場合
パターン③　漠然としたアイデアが浮かび、作図をして視覚化し、アイデアとして成立させる場合

(2) 確かめ
（絞り込んだ図形的要素と性質の関係を調べる）
直観的にとらえた図形の性質を、長さや面積を測定したり、その値を計算機能を用いて計算したり、補助線を作図したりして、予想した図形の性質が成り立つか否かを確かめる。

(3) 証　明（発見した性質を論理的に証明する。）

従来のコンパスと定規での作図による図形の性質の探求では、作図そのものの難しさ（時間・労力・精度）等のため、これまで効率が悪く、いくつかのアイデアが浮かんでもそれの有効性を確かめることが難しかった。作図ツールの図形の変形機能により、発見した性質が作図条件によるものであるか、偶然作図した特殊なものであるかを容易に判断できるため、様々なアイデアの検討が短時間に行うことができるようになった。そのため、論理的に成立することへの確信を持って、論証に取り組めるため、図形の性質の探求をより積極的に行うことができた。
また、測定機能・計算機能と変形機能により、論理的に考え、作成した式の有効性を確かめることもできた。
図形の性質の探求のコンピュータ化の研究が進んでいるが、現在の作図ツールでも平面図形のレベルでは十分楽しめるレベルにあるといえる。さらに交点だけでなく、

曲線も含めた共有部分やより自由度の高い範囲における測定機能なども実現するとさらなる図形の性質の探求がより一層楽しめるのではないかと考える。現在の作図ツールの登場により、平面図形への認識力が高まり、ＣＡＤにより空間概念が発達したように、空間図形に対応した作図ツールが登場すれば、空間図形への認識力が高まり、空間図形の性質に関する研究がより一層進むのではないかと作図ツールの発展に期待している。